

Применение компьютерной алгебры для составления спектральных моделей кинематического осесимметричного динамо

Г. М. Водинчар, Л. К. Фещенко*

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684043, Паратунка, Камчатский край, Россия

*Контактный автор: Фещенко Любовь Константиновна, e-mail: feshenko.lk@yandex.ru

Поступила 22 июля 2022 г., принята в печать 02 сентября 2022 г.

Описана автоматизированная технология составления одного класса спектральных моделей динамо с помощью систем компьютерной алгебры. Построение таких моделей сводится к расчету мод, являющихся решениями спектральных задач на собственные моды свободного затухания, и коэффициентов Галёркина. Предложенная технология позволяет быстро и безошибочно выявлять цепочки взаимодействующих мод, что очень важно при построении маломодовых моделей.

Подробно описан расчет собственных торо- и полоидальных мод свободного затухания магнитного поля с вакуумными граничными условиями и коэффициентов Галёркина для задачи осесимметричного кинематического динамо в сферической оболочке с использованием численно-аналитических возможностей систем компьютерной алгебры.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, гидромагнитное динамо, спектральные модели.

Цитирование: Водинчар Г.М., Фещенко Л.К. Применение компьютерной алгебры для составления спектральных моделей кинематического осесимметричного динамо. Вычислительные технологии. 2023; 28(2):4–18. DOI:10.25743/ICT.2023.28.2.002.

Введение

Исследование задач звездного и/или планетарного динамо предполагает работу с магнитогидродинамической системой, описывающей самосогласованный нелинейный процесс взаимодействия гидродинамических и магнитного полей во вращающихся областях сферической формы. Для подобных систем точные решения неизвестны, и приходится использовать различные численные методы и упрощенные модели [1, 2].

Весьма популярными являются спектральные методы и основанные на них модели [2–5]. В этих методах решения нестационарных задач ищутся в виде линейных комбинаций конечного числа стационарных базисных полей (мод) с зависящими от времени коэффициентами (амплитудами). Сами моды удобно выбирать ортогональными в области расчета решения. Для нестационарных амплитуд применением процедуры Галёркина или какого-либо другого из методов взвешенных невязок составляется динамическая система. Эта система вместе с выбранным конечным набором базисных мод

образует модель пространственно распределенной магнитогидродинамической системы. Часто в качестве мод выбирают собственные моды некоторых спектральных задач, почему и сами такие модели называют спектральными.

Отметим, что полнота системы базисных мод гарантирует сходимость к точному решению при неограниченном возрастании числа членов разложения. Однако при построении моделей, описывающих только крупномасштабные пространственные структуры, полнота не является обязательной. Достаточно, чтобы система мод обладала хорошими аппроксимирующими свойствами. Вообще говоря, с формальной точки зрения для построения моделей может подойти любая ортогональная система, но желательно, чтобы моды имели прозрачный физический смысл, образовывали естественные для изучаемой системы структуры. Представляется, что наиболее подходящими с этой точки зрения являются собственные моды свободных колебаний или свободной диссипации полей линеаризованных задач. Соответствующие спектральные задачи обычно являются самосопряженными, что обеспечивает и ортогональность таких физически естественных мод. Для уравнения Навье – Стокса применение метода Галёркина с подобными модами детально исследовалось в [6].

Такая схема моделирования содержит два вычислительных аспекта: во-первых, надо составить динамическую систему для амплитуд, во-вторых, эту систему надо решать, причем зачастую со многими вариантами начальных условий. Сама динамическая система является линейной или квадратично-нелинейной с постоянными коэффициентами, которые определяются управляющими параметрами модели и набором отобранных мод. Ее численное решение не вызывает особых затруднений.

Значительно больших усилий требует составление самой системы, поскольку расчет коэффициентов сводится к вычислению объемных интегралов по сферической области от различных мультипликативных комбинаций базисных мод и их пространственных производных. Надо сказать, что при “ручных” формульных выкладках проблематична даже сама безошибочная запись подынтегральных выражений ввиду их крайней громоздкости. Некоторые коэффициенты системы оказываются нулевыми. Причина в том, что сферическая симметрия области определяет естественное представление мод в широтно-долготном направлении с помощью сферических гармоник. Ортогональность сферических гармоник и некоторых их пространственных производных на поверхности сферы и приводит к обнулению ряда коэффициентов. Иногда эту ортогональность можно показать в общем виде, но гораздо чаще она завуалирована и проявляется только в процессе интегрирования, когда вычисляется интеграл сначала по поверхности сферы, а затем по радиусу.

Абсолютная величина каждого коэффициента может интерпретироваться как мера взаимодействия мод в процессе, описываемом соответствующим членом исходного уравнения. По этой причине точное равенство нулю некоторых коэффициентов может нести значительную физическую информацию, позволяя выявлять цепочки взаимодействующих мод. Поэтому важно иметь возможность сказать, является ли коэффициент близким к нулю или точно нулевым. Здесь могут помочь методы компьютерной алгебры (символьных вычислений).

В данной работе мы описываем математическую технологию автоматизации процесса составления вышеописанных динамических систем на основе методов компьютерной алгебры. В любой системе компьютерной алгебры (computer algebra system — CAS) можно программно реализовать следующую схему расчета:

- составление явных аналитических выражений для каждой моды;

- вычисление в аналитической форме подынтегральных выражений, являющихся некоторыми мультипликативными комбинациями мод и их пространственных производных;
- аналитическое интегрирование по поверхности сферы (это интегрирование дает нуль или некоторое выражение, зависящее от радиальной переменной);
- аналитическое или численное интегрирование по радиусу, если интеграл по поверхности сферы отличен от нуля.

Понятно, что два последних пункта могут выполняться стандартными средствами любой CAS, поскольку любая такая система позволяет выполнять как аналитическое, так и численное интегрирование. Для реализации первых двух пунктов необходимо вычислять операции векторного анализа в аналитической форме в сферических координатах. Для этого удобно использовать системы компьютерной алгебры, содержащие библиотеки операторов векторного анализа. Например, система Maple 12 и более поздние ее версии содержат библиотеку VectorCalculus, в которой реализованы все стандартные дифференциальные и интегральные операции векторного анализа в различных ортогональных координатных системах, в том числе — в сферических координатах. Однако необходимый для рассматриваемых задач набор операций векторного анализа можно запрограммировать в любой CAS.

В настоящей работе описана разработанная технология на примере задачи кинематического динамо для крупномасштабного поля без влияния крупномасштабных меридиональных течений. Поскольку движение среды носит турбулентный характер (оценочное значение числа Рейнольдса Re для космических объектов 10^9 – 10^{14} , а магнитного числа Рейнольдса Rm 10^2 – 10^9 [7]), в уравнении для крупномасштабного поля необходимо учитывать так называемый α -эффект, обеспечивающий генерацию крупномасштабного магнитного поля нелинейными взаимодействиями мелкомасштабных пульсаций скорости и магнитного поля. В задаче кинематического динамо поле скорости предполагается заданным и не учитывается влияние силы Лоренца на движение проводящей среды. В первом приближении крупномасштабные магнитные поля и течения в космических объектах можно считать осесимметричными. Именно этот случай и рассматривается далее.

1. Исходные уравнения

Пусть задана сферическая оболочка Ω , заполненная проводящей средой (внешнее ядро планеты или конвективная зона звезды). Эта оболочка вращается с некоторой неоднородной по пространству, но постоянной во времени угловой скоростью (дифференциальное вращение) вокруг фиксированной оси, проходящей через центр оболочки. Магнитная проницаемость всего пространства предполагается постоянной. Внутренняя по отношению к Ω область также заполнена проводящей средой, но движения, генерирующие магнитное поле, там отсутствуют.

Мы используем стандартно связанные декартову (x, y, z) и сферическую (r, θ, φ) системы координат, начало которых помещено в центр оболочки Ω , а ось Oz направлена вдоль оси вращения. Внешний радиус оболочки примем за единицу длины, а внутренний обозначим через r_i . Тогда безразмерные уравнения кинематического осесимметричного динамо для тороидальной $\mathbf{V}^T(\mathbf{r}, t)$ и полоидальной $\mathbf{V}^P(\mathbf{r}, t)$ компонент крупномасштабного поля можно записать в виде [1]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}^T}{\partial t} &= \text{Rm} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{V}^P) + \text{R}_\alpha \nabla \times (\hat{\alpha} \mathbf{V}^P) + \Delta \mathbf{V}^T, \\ \frac{\partial \mathbf{V}^P}{\partial t} &= \text{R}_\alpha \nabla \times (\hat{\alpha} \mathbf{V}^T) + \Delta \mathbf{V}^P.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $\mathbf{v} = u(r, \theta) \mathbf{e}_\varphi$ — заданное стационарное поле скорости дифференциального вращения, $\hat{\alpha} = a(r) \cos \theta$ — параметризованная форма α -эффекта с заданной интегрируемой $a(r)$, причем $\max |a(r)| = 1$ для $r_i \leq r \leq 1$. Безразмерными управляющими параметрами являются интенсивность α -эффекта R_α и магнитное число Рейнольдса Rm .

Отметим, что уравнения системы (1) должны выполняться не только в оболочке Ω , где происходит генерация магнитного поля, но и в области $r < r_i$, заполненной проводящей средой. Однако и скорость, и α -эффект в этой области полагаются нулевыми.

Внешняя по отношению к Ω часть пространства $r > 1$ считается непроводящей, значит, магнитное поле там должно быть потенциальным. Поэтому система (1) дополняется граничными условиями потенциальности (вакуумными условиями) для \mathbf{V}^T и \mathbf{V}^P при $r = 1$.

2. Общий вид уравнений спектральных моделей

Для получения общего вида уравнений спектральных моделей будем считать, что компоненты магнитного поля приближенно представлены линейными комбинациями конечного числа мод

$$\mathbf{V}^T(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^L \alpha_l(t) \mathbf{V}_l^T(\mathbf{r}), \quad \mathbf{V}^P(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^M \beta_m(t) \mathbf{V}_m^P(\mathbf{r}),\tag{2}$$

которые являются собственными модами свободного затухания компонент магнитного поля в Ω , т. е. решениями спектральной задачи

$$\mu \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{V} = 0 \text{ при } r = 1.\tag{3}$$

Поскольку оператор Лапласа переводит тороидальное поле в тороидальное, а полоидальное в полоидальное [3], задача (3) решается отдельно в каждом из этих классов полей. Конкретный вид самих собственных мод и их расчет рассмотрим позднее.

Отметим, что задача (3) является самосопряженной в каждом из двух классов полей относительно скалярного произведения

$$\langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \rangle = \iiint_{0 \leq r \leq 1} \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 dV = 2\pi \int_0^1 r^2 dr \int_0^\pi \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \sin \theta d\theta,\tag{4}$$

а система ее собственных мод полна [6]. Поэтому далее будем считать, что используемые для представления магнитного поля моды образуют конечную ортонормированную систему.

Подставим разложения (2) в уравнения системы (1) и применим процедуру Галёркина. В результате получим динамическую систему для амплитуд мод:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_l(t)}{dt} &= \text{Rm} \sum_{j=1}^M W_j^l \beta_j(t) + \text{R}_\alpha \sum_{j=1}^M Z_j^l \beta_j(t) - \eta_l^T \alpha_l(t), \quad l = 1, \dots, L, \\ \frac{d\beta_m(t)}{dt} &= \text{R}_\alpha \sum_{i=1}^L Q_i^m \alpha_i(t) - \eta_m^P \beta_m(t), \quad m = 1, \dots, M.\end{aligned}\tag{5}$$

В этой системе η_k^T и η_s^P — собственные значения соответствующих мод, а остальные коэффициенты являются скалярными произведениями

$$W_j^l = \langle \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_j^P), \mathbf{B}_l^T \rangle, \quad Z_j^l = \langle \nabla \times (\hat{\alpha} \mathbf{B}_j^P), \mathbf{B}_l^T \rangle, \quad Q_i^m = \langle \nabla \times (\hat{\alpha} \mathbf{B}_i^T), \mathbf{B}_m^P \rangle. \quad (6)$$

При вычислении этих коэффициентов в соответствии с определением скалярного произведения (4) интегрирование формально ведется по единичному шару, но фактически интегралы вычисляются только по оболочке Ω , так как \mathbf{v} и $\hat{\alpha}$ — нулевые при $r < r_i$. Поэтому промежутком интегрирования по r будет $[r_i; 1]$. Составление конкретной спектральной модели при известных собственных значениях и выражениях для мод заключается в расчете всех коэффициентов (6).

Заметим, что система (5) является линейной и может давать незатухающие ограниченные решения только в исключительных случаях. Это модель кинематического динамо, которое описывает лишь начальный этап генерации поля. Такие модели используют для описания длительной динамики, вводя механизм подавления генерации поля искусственно. Есть разные формы этого механизма, но общая идея заключается в том, что в управляющие параметры вносится поправка, квадратично зависящая от компонент поля. Такая квадратичная зависимость моделирует модификацию течений среды силой Лоренца. Например, подавление α -эффекта в простейшей форме можно ввести в систему (5) заменой

$$R_\alpha \rightarrow \frac{R_\alpha}{1 + \sum_{l=1}^L \alpha_l^2 + \sum_{m=1}^M \beta_m^2}.$$

Однако для данной работы конкретный вид механизма подавления не играет роли и мы не будем его учитывать.

3. Расчет базисных мод

Рассмотрим расчет базисных мод для полей системы (1), в качестве которых будем использовать собственные моды задачи (3) отдельно в классах тороидальных и полоидальных полей.

Вывод общего вида собственных мод этой задачи для единичного шара с вакуумными условиями для поля в трехмерном случае (без осевой симметрии), уравнений на собственные значения и нормировочных условий подробно описан в работе [8]. Поэтому в настоящей работе мы будем использовать без вывода соответствующие выражения, специализированные на осесимметричный случай, но подробно опишем технологию расчета параметров мод с использованием численно-аналитических возможностей CAS. Будем опираться при этом на пакет Maple, хотя все можно сделать и в любой другой CAS.

3.1. Расчет тороидальных базисных мод

Тороидальные осесимметричные собственные моды задачи (3), ограниченные в центре шара, имеют вид

$$\mathbf{B}_{kn}^T = \nabla \times \left(A_{kn}^T j_n \left(\sqrt{\eta_{kn}^T} r \right) P_n(\cos \theta) \mathbf{r} \right), \quad k = 0, 1, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где $P_n(\cdot)$ — многочлены Лежандра, $j_n(\cdot)$ — сферические функции Бесселя первого рода, а $\eta_{kn}^T > 0$ — собственные значения. Постоянные коэффициенты A_{kn}^T обеспечивают нормировку собственных мод относительно скалярного произведения (4).

Собственные значения η_{kn}^T определяются из условий $\mathbf{B}_{kn}^T = 0$ при $r = 1$ и являются решениями уравнений

$$j_n(\sqrt{\eta}) = 0, \quad (8)$$

которые для каждого n имеют счетное семейство решений, нумеруемых индексом k .

После определения η_{kn}^T нормировочные коэффициенты A_{kn}^T определяются с точностью до знака условием

$$(A_{kn}^T)^2 \frac{4\pi n(n+1)}{2n+1} \int_0^1 j_n^2\left(\sqrt{\eta_{kn}^T} r\right) r^2 dr = 1. \quad (9)$$

Ясно, что расчет базисных мод требует, кроме знания основного выражения (7), еще и вычисления η_{kn}^T и A_{kn}^T . Эти параметры могут быть определены только численно для конечного набора n и k . Численное решение уравнения (8) не вызывает затруднений. Вместе с тем численный расчет A_{kn}^T требует осторожности, поскольку подынтегральное выражение (9) имеет особенности в нуле. Это хорошо видно из рекуррентных соотношений [9], определяющих функции $j_n(z)$ для любых целочисленных значений индекса n :

$$j_{-1} = \frac{\cos z}{z}, \quad j_0 = \frac{\sin z}{z}, \quad j_{n+1} = \frac{2n+1}{z} j_n(z) - j_{n-1}(z). \quad (10)$$

Использование CAS позволяет обойти эти затруднения — интегрирование ведется аналитически с неопределенным значением η_{kn}^T , и только в окончательное выражение подставляются численные значения.

Рассмотрим фрагмент кода Maple для определения собственных значений и нормировочных коэффициентов. Переменные N и K в нем имеют смысл максимальных значений индексов n и k , для которых ведется расчет мод.

```

1  N:=10: K:=5: assume(eta_>0):
2  j[-1]:=cos(z)/z: j[0]:=sin(z)/z:
   for n from 0 to N-1 do
4   j[n+1]:=simplify((2*n+1)/z*j[n]-j[n-1]):
   end do:
6  for n from 1 to N do
   Norm_int:=int(eval(j[n],[z=sqrt(eta_)*r])^2*r^2,r=0..1):
8   eq:=eval(j[n],[z=sqrt(eta_)]):
   k:=0:
10  r1:=0.001:
   eq1:=eval(eq,[eta_=r1]):
12  while (k<K) do
   r2:=r1+1.:
14  eq2:=eval(eq,[eta_=r2]):
   if (eq1*eq2<0) then
16  etaT[k,n]:=fsolve(eq=0,eta_=r1..r2):
   AT[k,n]:=sqrt((2*n+1)/(4*evalf(Pi)*n*(n+1)))/
18  eval(Norm_int,[eta_=etaT[k,n]]):
   k:=k+1:
20  end if:

```

```

    r1:=r2:
22    eq1:=eq2:
    end do:
24 end do:

```

Для читателей, незнакомых с языком Maple, поясним: процедура `simplify(expr)` выполняет упрощение выражения `expr`; процедура `eval(expr,[x1=expr1,x2=expr2,...])` выполняет подстановку выражений `expr1`, `expr2`, ... в выражение `expr` вместо переменных `x1`, `x2`, ...; процедура `fsolve(F(x)=0,x=a..b)` численно находит корень уравнения $F(x) = 0$, локализованный на отрезке $[a; b]$; процедура `int(expr,x=a..b)` выполняет аналитическое интегрирование выражения `expr` по переменной x в пределах от a до b ; `assume(val>0)` сообщает пакету, что `val` — положительная переменная величина.

Сначала с помощью рекуррентных соотношений для сферических функций Бесселя формируются символьные массивы явных выражений для этих функций (строки 2–5). Затем реализуется основной цикл по индексу n , в котором находятся собственные значения η_{kn}^T и коэффициенты A_{kn}^T .

Для этого в строке 7 аналитически в общем виде вычисляется интеграл из нормировочного условия (9) и его символьное значение записывается в переменную `Norm_int`. В строке 8 составляется выражение для уравнения на собственные значения. Далее реализуются локализация и численный поиск корней уравнения для собственных значений с шагом 1, пока не будут найдены первые K корней. Это выполняется в цикле по индексу k . На каждом шаге цикла после локализации корня он определяется с помощью стандартной процедуры Maple для численного решения уравнений в строке 16. Затем в строках 17–18 вычисляются коэффициенты A_{kn}^T . Для этого находится численное значение переменной `Norm_int` при соответствующем числовом значении η_{kn}^T .

Графики некоторых радиальных функций $A_{kn}^T j_n(\sqrt{\eta_{kn}^T} r) = X_{kn}(r)$ для тороидальных мод представлены на рис. 1. Видно, что значения индекса k совпадают с количеством нулей функций на интервале $(0; 1)$ и сами функции — нулевые в точке $r = 1$. Это косвенно подтверждает правильность расчета собственных значений.

3.2. Расчет полоидальных базисных мод

Полоидальные осесимметричные собственные моды задачи (3), ограниченные в центре шара, имеют вид

$$\mathbf{V}_{kn}^P = \nabla \times \left[\nabla \times \left(A_{kn}^P j_n \left(\sqrt{\eta_{kn}^P} r \right) P_n(\cos \theta) \mathbf{r} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где $\eta_{kn}^P > 0$ — собственные значения, а постоянные коэффициенты A_{kn}^P обеспечивают нормировку относительно скалярного произведения (4).

Собственные значения $\eta_{kn}^P > 0$ определяются из граничных условий задачи (3) и для полоидальных мод вида (11) являются решениями уравнения [8]

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d}{dr} \right) j_n(\sqrt{\eta} r) \Big|_{r=1} = 0.$$

Аналогично тороидальному случаю для каждого n получаем счетное множество собственных значений $\eta = \eta_{kn}^P$, нумеруемых индексом k .

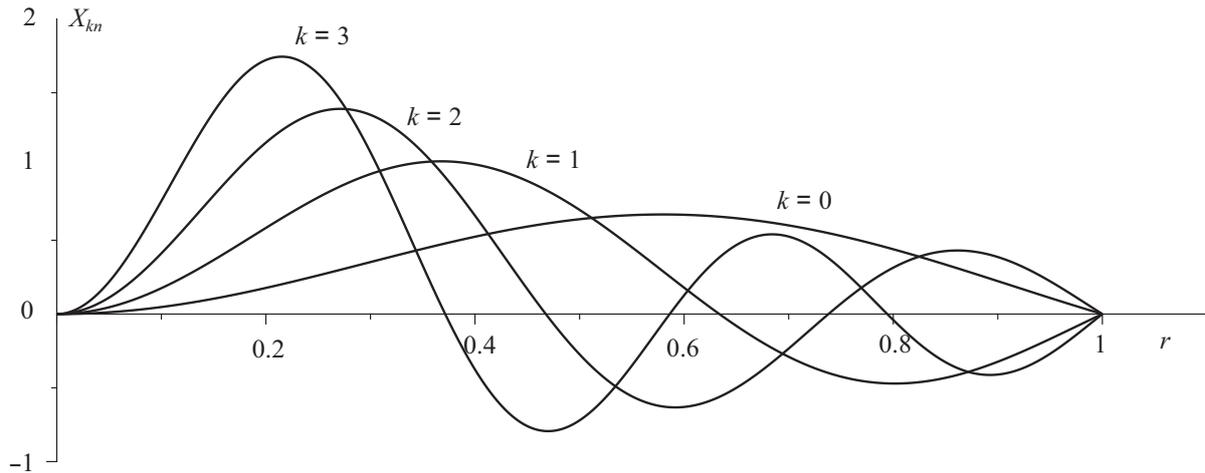


Рис. 1. Графики радиальных функций тороидальных мод $X_{kn}(r) = A_{kn}^T j_n(\sqrt{\eta_{kn}^T} r)$ для $n = 2$ и $k = 0, \dots, 3$

Fig. 1. The graphs of the radial functions $X_{kn}(r) = A_{kn}^T j_n(\sqrt{\eta_{kn}^T} r)$ for the toroidal modes for $n = 2$ and $k = 0, \dots, 3$

Нормировочные коэффициенты A_{kn}^P определяются условием

$$\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} (A_{kn}^P)^{-2} = n(n+1) \int_0^1 j_n^2(\sqrt{\eta_{kn}^P} r) dr + \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) j_n(\sqrt{\eta_{kn}^P} r) \right]^2 r^2 dr.$$

Приведем фрагмент кода Maple для основного цикла расчета собственных значений и нормировочных коэффициентов полоидальных мод.

```

30 for n from 1 to N do
    Norm_int1:= n*(n+1)*int(eval(j[n],[z=sqrt(eta_)*r])^2,r = 0..1):
32 Norm_int2:=int((eval(j[n],[z=sqrt(eta_)*r])/r+
    diff(eval(j[n],[z=sqrt(eta_)*r]),r))^2*r^2,r=0..1):
34 eq:=eval(eval(j[n],[z=sqrt(eta_)*r])/r+
    diff(eval(j[n],[z=sqrt(eta_)*r]),r)/(n+1),[r=1]):
36 k:=0:
    r1:=0.001:
38 eq1:=eval(eq,[eta_=r1]):
    while (k<K) do
40 r2:=r1+1.:
    eq2:=eval(eq,[eta_=r2]):
42 if (eq1*eq2<0) then
    etaP[k,n]:=fsolve(eq=0,eta_=r1..r2):
44 AP[k,n]:=sqrt((2*n+1)/(4*evalf(Pi)*n*(n+1))/
    eval(Norm_int1+Norm_int2,[eta_=etaP[k,n]])):
46 k:=k+1:
    end if:
48 r1:=r2:
    eq1:=eq2:
50 end do:
end do:

```

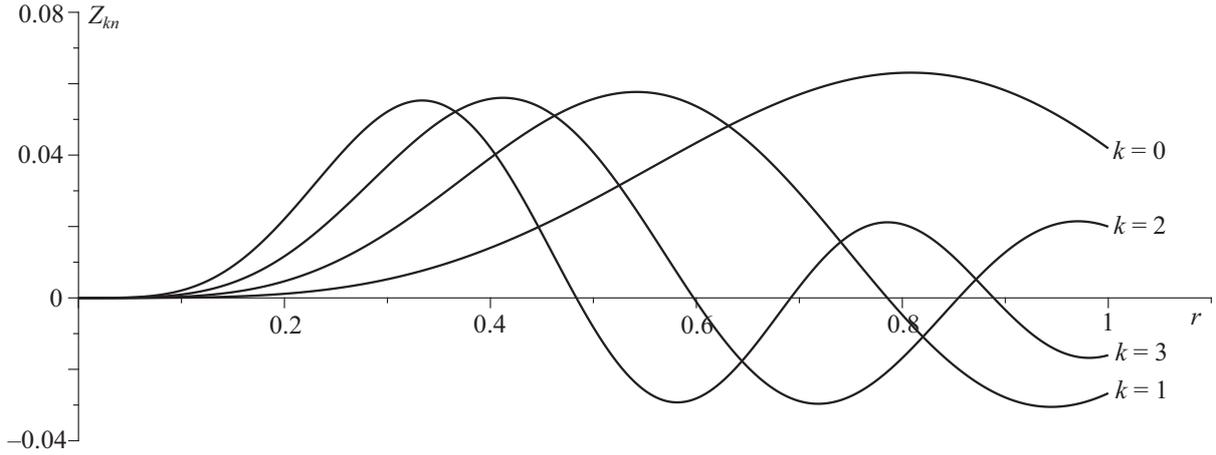


Рис. 2. Графики радиальных функций полоидальных мод $Z_{kn}(r) = A_{kn}^P j_n(\sqrt{\eta_{kn}^P} r)$ для $n = 4$ и $k = 0, \dots, 3$

Fig. 2. The graphs of the radial functions $Z_{kn}(r) = A_{kn}^P j_n(\sqrt{\eta_{kn}^P} r)$ for the poloidal modes for $n = 4$ and $k = 0, \dots, 3$

По сравнению с предыдущим фрагментом здесь представлены очевидные модификации, связанные с другими уравнениями на собственные значения и нормировками. Отметим лишь то, что процедура `diff(expr,r)` дифференцирует выражение `expr` по переменной r .

На рис. 2 приведены графики некоторых радиальных функций $A_{kn}^P j_n(\sqrt{\eta_{kn}^P} r) = Z_{kn}(r)$. Опять, как и в случае тороидальных мод, видно, что значения индекса k совпадают с количеством нулей функций на интервале $(0; 1)$. Это снова косвенно подтверждает правильность расчета собственных значений.

4. Расчет коэффициентов спектральной модели

При составлении спектральной модели основная вычислительная задача заключается в расчете коэффициентов (6), определяемых как объемные интегралы от достаточно сложных выражений. Чтобы понять, насколько они сложны, следует посмотреть на выражения для сферических функций Бесселя и формулы для ротора в сферических координатах. Даже при численном интегрировании безошибочная запись подынтегрального выражения в расчетной программе — уже проблема.

Можно сказать, что альтернативы использованию CAS для составления моделей типа (1) просто нет. Здесь также необходимо учесть, что после выбора мод и составления модели может оказаться, что она не описывает все необходимые процессы и взаимодействия, присущие динамо-системе. Например, если все коэффициенты W_j^l равны нулю, получается, что модель (1) не учитывает генерацию тороидального поля за счет дифференциального вращения. В этом случае мы должны изменить набор мод и пересчитать некоторые коэффициенты.

Отдельные этапы описываемой технологии использованы ранее, например в [10, 11], а в данной работе дается общая систематизация для случая осесимметричного кинематического динамо.

Далее будем считать, что зависимость заданной скорости дифференциального вращения $\mathbf{v} = u(r, \theta)\mathbf{e}_\varphi$ в системе (1) от θ представлена через разложение по нескольким первым многочленам Лежандра:

$$u(r, \theta) = \sum_{s=1}^S U_s(r) P_s(\cos \theta) \quad (12)$$

с известными функциями $U_s(r)$. Такими разложениями можно представить любые правдоподобные профили скорости.

Базисные магнитные моды (7), (11) определяются парами индексов (k, n) , поэтому индексы l и m в (2) в действительности являются мультииндексами: $l \sim (k_l, n_l)$ и $m \sim (k_m, n_m)$. Эти мультииндексы можно задать как одномерные массивы двухэлементных списков indT и indP . Например, если $\mathbf{B}_3^T = \mathbf{B}_{4,7}^T$, то в коде будет $\text{indT}[3]:= [4,7]$. Обращение к первому индексу моды $\mathbf{B}_{4,7}^T$ будет $\text{indT}[3][1]$, а ко второму — $\text{indT}[3][2]$.

Пусть K и N — максимальные значения соответственно первого и второго элементов в мультииндексах. Будем считать, что в программе уже вычислены элементы массивов $(k = 0, \dots, K, n = 1, \dots, N)$:

- $\text{j}[n]$ и $\text{P}[n]$ — выражений для сферических функций Бесселя $j_n(z)$ и многочленов Лежандра $P_n(z)$;
- $\text{etaT}[k,n]$ и $\text{etaP}[k,n]$ — собственных значений η_{kn}^T и η_{kn}^P ;
- $\text{AT}[k,n]$ и $\text{AP}[k,n]$ — нормировочных коэффициентов A_{kn}^T и A_{kn}^P базисных мод;
- $\text{U}[s]$ — выражений для функций $U_s(r)$ в разложении дифференциального вращения (12).

Также считаем заданной функцию $a(r)$.

Далее составляем массивы выражений для мод, скорости и α -эффекта. Приведем соответствующий код.

```

100  with(VectorCalculus): SetCoordinates('spherical' [r, theta, phi]):
    for l from 1 to M do
102      n:=indT[l][2]:
          BT[l]:=Curl(RT_[l](r)*eval(P[n],[z=cos(theta)]))*
104          VectorField(<r,0,0>):
    end do:
106  for m from 1 to M do
          n:=indP[m][2]:
108      BP[m]:=Curl(Curl(RP_[l](r)*eval(P[n],[z=cos(theta)]))*
          VectorField(<r,0,0>)):
110  end do:
          v:=sum(U_[s](r)*eval(P[s],[z=cos(theta)]),s=1..S)*VectorField(<0,0,1>):
112  alpha:=a_(r)*cos(theta):

```

В строке 100 подключается библиотека векторного анализа и устанавливается сферическая система координат. В двух циклах формируются массивы BT и BP выражений для базисных мод \mathbf{B}_l^T и \mathbf{B}_l^P , а в строках 111, 112 — выражения для дифференциального вращения и α -эффекта. Процедура $\text{VectorField}(\langle F1, F2, F3 \rangle)$ определяет векторное поле по его компонентам, $\text{Curl}()$ вычисляет ротор. Поэтому в циклах определяются радиус-вектор \mathbf{r} как векторное поле и базисные моды.

Отметим, что выражения для зависящих от r функций остаются еще не определенными. Используются абстрактные $\text{RT}_-[l](r)$, $\text{RP}_-[m](r)$, $\text{U}_-[s](r)$, $\text{a}_-(r)$. Это сделано специально.

При вычислении коэффициентов (6) будем сначала вести аналитическое интегрирование по θ , так как из опыта построения моделей следует, что равенство коэффициента

нулю обычно выявляется именно на этом этапе. Для интегрирования по θ конкретные выражения для радиальных функций не нужны. CAS нужно только знать, что это некоторые функции аргумента r . Тогда она не тратит машинное время и оперативную память для обработки выражений радиальных функций. Однако, если интеграл по θ оказывается ненулевым, вместо абстрактных функций необходимо подставить явные выражения радиальных функций и осуществить интегрирование по r . И это последнее интегрирование уже может выполняться численно, поскольку выражения для радиальных функций содержат параметры, которые ранее определены численно. В такой ситуации аналитическое интегрирование нецелесообразно.

Кроме того, при расчете коэффициентов (6) интегрирование ведется по отрезку $[r_i; 1]$, а не по $[0; 1]$, как при расчете собственных мод, и здесь не возникают особенности в нуле. Для r_i должно быть задано числовое значение. Оно определяется конкретным космическим объектом, для которого рассчитывается модель (например, для жидкого ядра Земли $r_i = 0.35$).

Теперь определим явные выражения для всех радиальных функций, которые будем использовать в последующих подстановках.

```

150  for l from 1 to L do
      k:=indT[l][1]: n:=indT[l][2]:
152  RT[l]:=AT[k,n]*eval(j[n],[z=sqrt(etaT[k,n])*r]):
      end do:
154  for m from 1 to M do
      k:=indP[m][1]: n:=indP[m][2]:
156  RP[m]:=AP[k,n]*eval(j[n],[z=sqrt(etaP[k,n])*r]):
      end do:
158  a:=<явное выражение для функции a(r)>
      for s from 1 to S do
160  U[s]:=<явное выражение для функции U[s](r)>
      end do:

```

Далее уже можно вычислять коэффициенты спектральной модели. Рассмотрим фрагмент кода для расчета коэффициентов $W_j^l = \langle \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_j^P), \mathbf{B}_l^T \rangle$.

```

170  seqU:=seq(U_[s](r)=U[s],s=1..S):
      for j from 1 to M do
172  W1_:=Curl(CrossProduct(v,BP[j])):
      for l from 1 to M do
174  W2_:=sin(theta)*DotProduct(W1_,BT[l]):
      W2_:=int(W2_,theta=0..Pi):
176  if (W2_<>0) then
      W3_:=eval(W2_,[RT_[l](r)=RT[l],RP_[j](r)=RP[j],seqU]):
178  W[l,j]:=evalf(2*Pi)*int(r^2*W3_,r=r_i..1.):
      else
180  W[l,j]:=0:
      end if:
182  end do:
      end do:

```

Поясним, что процедуры `CrossProduct` и `DotProduct` вычисляют векторное и скалярное (в точке) произведения полей. В строке 170 формируется символьная последовательность равенств для подстановок конкретных выражений $U[s]$ вместо абстрактных функций $U_s(r)$. В строках 172 и 174 формируется подынтегральное выражение, в 175 оно интегрируется по θ . Далее, если результат ненулевой, в 177 и 178 выполняются подстановка выражений в радиальные функции и расчет коэффициента W_j^l численным интегрированием по r . В противном случае W_j^l полагается нулевым.

Похожим образом можно вычислить и остальные коэффициенты спектральной модели. Соответствующие коды приводить не будем вследствие очевидности изменений.

Во введении уже говорилось, что для выделения цепочек взаимодействующих мод важно знать, является ли тот или иной коэффициент модели в точности нулевым или нет. Это важная физическая информация. Если равенство нулю установлено на этапе аналитического интегрирования, то все понятно. Но возможна и ситуация, когда именно интегрирование по r должно дать это нулевое значение. При численном интегрировании мы никогда не получим в точности нулевого результата. Численные расчеты в CAS реализованы с помощью программной эмуляции вычислений с плавающей точкой, это делает их медленными, но позволяет легко управлять количеством контролируемых десятичных знаков. Например, в Maple за это отвечает значение системной переменной `Digits`, которое легко меняется (по умолчанию — 10). Если какой-то коэффициент в реальности нулевой, то его значение будет малой величиной, порядок которой связан со значением `Digits`. Поэтому, пересчитывая коэффициенты с разной точностью, легко выделить нулевые.

Заключение

Исследование задач гидродинамики и магнитной гидродинамики с помощью спектральных моделей требует вычисления коэффициентов Галёркина. Построение маломодовых моделей предполагает отбор мод, и здесь очень важно уметь определять, является ли точное значение того или иного коэффициента нулевым. И если оно оказывается нулевым, это с физической точки зрения означает отсутствие взаимодействия мод в процессе, описываемом соответствующим членом исходного уравнения. То есть нужна технология, позволяющая по возможности точно (аналитически) определять коэффициенты. Тогда складывается четкое понимание взаимодействия тех или иных мод.

В расчете коэффициентов и заключается основная вычислительная сложность, поскольку численное решение динамической системы для амплитуд спектральных мод обычно не вызывает затруднений. В задачах планетарного и звездного динамо приходится работать в сферических координатах, это диктует геометрия расчетной области. Интегралы, определяющие коэффициенты, включают сложные подынтегральные выражения с дифференциальными операторами векторного анализа, которые в сферических координатах очень громоздки. Необходима автоматизация как составления подынтегральных выражений, так и интегрирования.

Описанная в работе технология в какой-то мере решает вышеуказанные проблемы. Она позволяет быстро и зачастую аналитически устанавливать равенство нулю коэффициентов, вычислять их с управляемой точностью. Конечно, численные расчеты в CAS медленные, это плата за использование программной эмуляции арифметики с плавающей точкой. Однако коэффициенты модели считаются только один раз, поэтому быстрое действие здесь не очень важно.

В своей работе мы базировались на пакете Maple, поскольку одна из его библиотек содержит готовые функции для вычисления операторов векторного анализа и поддерживает сферические координаты. Без существенных изменений все эти расчеты можно организовать и в любой другой CAS. При необходимости минимальный набор операторов несложно запрограммировать в виде пользовательских функций. В конечном счете, все они сводятся к алгебраическим операциям и дифференцированию. А это можно в символьной форме делать в любой системе.

Мы не ставили задачи составлять и исследовать конкретные спектральные модели. Ранее мы изучали ряд моделей, коэффициенты которых вычислялись с использованием CAS (см., например, [10, 11]). Но сама организация расчетов не рассматривалась. Целью настоящей работы была систематизация и описание общей технологии составления спектральных моделей динамо в сферических оболочках. Мы ограничились только случаем кинематического осесимметричного динамо. Этого достаточно для описания идеи расчетов. Описание полной трехмерной системы магнитогидродинамической конвекции было бы очень объемным.

Представленная в работе технология может оказаться полезной при исследовании задач динамо спектральными методами.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 22-11-00064).

Список литературы

- [1] Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в астрофизике. М.; Ижевск: РХД; 2006: 384.
 - [2] Merrill R.T., McElhinny M.W., McFadden P.L. The magnetic field of the Earth. N.Y.: Academic Press; 1996: 531.
 - [3] Chandrasekhar S. Hydrodynamics and hydromagnetic stability. N.Y.: Dover Publications; 1981: 654.
 - [4] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. М.: Наука; 1988: 352.
 - [5] Jones C.A. Convection-driven geodynamo models. Philosophical Transactions of the Royal Society A. 1987; (358):873–897.
 - [6] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука; 1970: 288.
 - [7] Plunian F., Stepanov R., Frick P. Shell models of magnetohydrodynamic turbulence. Physics Reports. 2013; 523(1):1–60. DOI:10.1016/j.physrep.2012.09.001.
 - [8] Водинчар Г.М., Крутьева Л.К. Базисные системы для геомагнитного поля. Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2010; 1(1):24–30. DOI:10.18454/2079-6641-2010-1-1-24-30.
 - [9] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука; 1968: 832.
 - [10] Водинчар Г.М., Крутьева Л.К. Маломодовая модель геодинамо. Вычислительные технологии. 2011; 16(2):35–44.
 - [11] Vodinchar G.M., Feshchenko L.K. Model of geodynamo driven by six-jet convection in the Earth's core. Magnetohydrodynamics. 2016; 52(1):287–299.
-

MATHEMATICAL MODELLING

DOI:10.25743/ICT.2023.28.2.002

Computer algebra application for the developed of the spectral models of kinematic axisymmetric dynamo

G. M. VODINCHAR, L. K. FESHCHENKO*

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Paratunka, Kamchatka, Russia

*Corresponding author: Feshchenko Liubov K., e-mail: feshenko.lk@yandex.ru

Received July 22, 2022, accepted September 02, 2022.

Abstract

In spectral models of dynamo systems, solutions are represented as linear combinations of a finite number of stationary basis fields (modes). The modes themselves are the solution to some spectral problems. From the physical point of view the most natural are the modes consisting of oscillations, which could be free or damping.

To developed a model, it is necessary to determine the modes parameters and eigenvalues and then calculate the Galerkin coefficients. The purpose of the paper is to develop a computing technology for automating these calculations.

The technology is based on computer algebra methods. The Galerkin coefficients are integrals of very complex expressions. Therefore, correct determination of the integrand is a difficult problem. Here, it is convenient to use computer algebra systems (CAS). Coefficients are measures of mode interaction so whether the coefficient is exactly zero or not, seem to be important. The identification of zero coefficients using CAS can be done analytically.

The paper thoroughly describes a technology for automated calculation of the basis modes and Galerkin coefficients using the Maple package. The case of an axisymmetric kinematic dynamo is considered. A description of the calculations for the complete system of magnetohydrodynamic convection would be very long. However, the general idea is clear for the described case.

The proposed technology allows quick and accurate generating of various spectral models by varying the mode sets.

It seems to be useful for the study of dynamos using spectral models.

Keywords: computer algebra, hydromagnetic dynamo, spectral models.

Citation: Vodinchar G.M., Feshchenko L.K. Computer algebra application for the developed of the spectral models of kinematic axisymmetric dynamo. Computational Technologies. 2023; 28(2):4–18. DOI:10.25743/ICT.2023.28.2.002. (In Russ.)

Acknowledgements. Research was funded by Russian Science Foundation grant No. 22-11-0006.

References

1. **Zeldovich Ya.B., Rusmaikin A.A., Sokoloff D.D.** Magnetic fields in astrophysics. The fluid mechanics of astrophysics and geophysics. N.Y.: Gordon and Breach; 1983: 321.
2. **Merril R.T., McElhinny M.W., McFadden P.L.** The magnetic field of the Earth. N.Y.: Academic Press; 1996: 531.
3. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamics and hydromagnetic stability. N.Y.: Dover Publications; 1981: 654.
4. **Fletcher C.** Computational Galerkin methods. N.Y.; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verlag; 1984: 307.
5. **Jones C.A.** Convection-driven geodynamo models. Philosophical Transactions of the Royal Society A. 1987; (358):873–897.

6. **Ladyzhenskaya O.A.** Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti []. Moscow: Nauka; 1970: 288. (In Russ.)
7. **Plunian F., Stepanov R., Frick P.** Shell models of magnetohydrodynamic turbulence. *Physics Reports*. 2013; 523(1):1–60. DOI:10.1016/j.physrep.2012.09.001.
8. **Vodinchar G.M., Kruteva L.K.** Bазисnye sistemy dlya geomagnitnogo polya []. *Bulletin of KRAESC*. 2010; (1):24–30. DOI:10.18454/2079-6641-2010-1-1-24-30. (In Russ.)
9. **Korn G., Korn T.** *Mathimatical handbook (for scientists and engeneers)*. N.Y.; San Francisko; Toronto; London; Sydney: McRaw-Hill Book Company; 1961: 792.
10. **Vodinchar G.M., Kruteva L.K.** Low-mode geodynamo model. *Computational Technologies*. 2011; 16(2):35–44. (In Russ.)
11. **Vodinchar G.M., Feshchenko L.K.** Model of geodynamo driven by six-jet convection in the Eartt's core. *Magnetohydrodynamics*. 2016; 52(1):287–299.